ریاضیات (کاربردی ـ عددی)

۱. قرص نفتالین به شعاع اولیهٔ R در هوای خالص با سرعت $k(p^*-p)\dfrac{\text{مول}}{\text{دقیقه}}$ تصعید می‌شود، به‌طوری کــه p فشار بخار نفتالین در هوا و p^* فشار بخار اشباع نفتالین در دمای محیط می‌باشد. با فرض ثابت بودن دما، معادله دیفرانسیل تغییرات شعاع نفتالین بر حسب زمان کدام است؟

M : جرم مولی نفتلین و ρ دانسیته نفتالین و k :ضریب ثابت انتقال جرم

۱) $\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{kM}{4\pi r^2\rho}(p-p^*)$

۲) $\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{kM}{\rho}(p-p^*)$

۳) $\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{k}{4\pi R^2\rho}(p-p^*)$

۴) $\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{k}{4\pi R^2}(p-p^*)$

۲. مایعی شامل ماده A غلظت C_{Ao} و با دبی $v=v_0+\alpha(V_0-V)$ وارد یک مخزن به حجم اولیه V_0 می شود، با همان دبی خارج می‌شود. اگر خروجی قطع شود. تغییرات حجم مایع مخزن (V)، با کدام رابطه تطبیق دارد؟

۱) $V=V_0+\dfrac{\rho v_0}{C_{A_o}\alpha}\left[1-\exp\left(\dfrac{-\alpha C_{A_o}t}{\rho}\right)\right]$

۲) $V=V_0+\dfrac{v_0}{\alpha}\left[1-\exp(-\alpha t)\right]$

۳) $V=V_0-\exp\left(\dfrac{-\alpha C_{Ao}t}{\rho}\right)$

۴) $V=V_0+\dfrac{v_0}{\alpha}\exp(-\alpha t)$

۳. معادله‌ی ناهمگن انتقال حرارت در یک بعد مکانی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم: (a مقدار ثابتی می‌باشد). پاسخ حالت پایدار یعنی $\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)$ کدام است؟

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a=\frac{\partial u}{\partial t};0\le x\le L\ ,\ t>0$$

$$u(0,t)=T_0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0$$

۱) $\dfrac{ax}{2}(2L-x)+T_0$

۲) $\dfrac{a}{2}(L-x)^2+T_0$

۳) $\dfrac{a}{2}x(L-x)+T_0$

۴) $ax(L-x)+T_0$

۴ . واکنش گرماده، درجه اول $A \xrightarrow{k} B$ با انتالپی واکنش ΔH_R در یک دانه کاتالیزور به حجم V در شرایط ناپایا انجام می‌شود. با فرض یکنواخت بودن دمای کاتالیزور، تغییرات دمای آن با زمان، از کدام معادله‌ی دیفرانسیل پیروی می‌کند؟ ρ و C_p به ترتیب دانسیته و گرمای ویژه‌ی کاتالیزور و h ضریب انتقال حرارت محیط است. A: سطح جانبی دانه است.

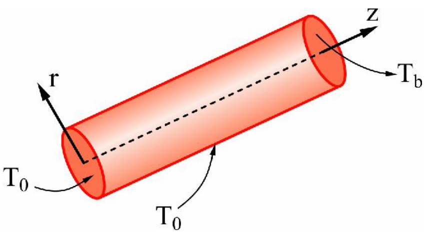
۱) $\frac{dT}{dt} = kC_A\left(-\Delta H_R\right)\left(T - T_\infty\right)$

۲) $\frac{dT}{dt} = \frac{hA}{C_\rho V_\rho}\left(T - T_\infty\right)$

۳) $\frac{dT}{dt} = \frac{kC_A}{\rho C_p}\left(-\Delta H_R\right) - \frac{hA}{C_p V_\rho}\left(T - T_\infty\right)$

۴) $\frac{dT}{dt} = \frac{kC_A}{\rho C_p}\left(-\Delta H_R\right)$

۵ . استوانه توپری را که سطح جانبی و یک قاعده آن در دمای T_0 قرار دارد در نظر بگیرید. قاعده دیگر استوانه در دمای T_b قرار گرفته است. اگر ثابت هدایت گرمایی استوانه k، شعاع آن R و طول آن L باشد، کدام‌یک از گزینه‌های زیر برای توزیع دما صحیح است؟ $\left(\theta = T - T_0\right)$, $\left(\theta_b = T_b - T_0\right)$



۱) $\theta(r,z) = 2\theta_b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)\sinh(\lambda_n z)}{\lambda_n R J_1(\lambda_n R)\sinh(\lambda_n L)}$

۲) $\theta(r,z) = 2\theta_b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_0(\lambda_n r)\sin(\lambda_n z)}{\lambda_n R Y_1(\lambda_n R)\sin(\lambda_n L)}$

۳) $\theta(r,z) = 2\theta_b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)\cosh(\lambda_n z)}{\lambda_n R J_1(\lambda_n R)\cosh(\lambda_n L)}$

۴) $\theta(r,z) = 2\theta_b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_0(\lambda_n r)\sinh(\lambda_n z)}{\lambda_n R Y_1(\lambda_n R)\sinh(\lambda_n L)}$

۶ . جواب معادله دیفرانسیل $\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ با شرایط مرزی $\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$ کدام است؟

۱) $\sum_{0}^{\infty} A_n e^{-\alpha\left(\frac{2n+1}{2L}\pi\right)^2 t} J_0\left(\frac{2n+1}{2L}\pi x\right)$

۲) $\sum_{0}^{\infty} A_n e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

۳) $\sum_{0}^{\infty} A_n e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

۴) $\sum_{0}^{\infty} A_n e^{-\alpha\left(\frac{2n+1}{2L}\pi\right)^2 t} \sin\left(\frac{2n+1}{2L}\pi x\right)$

۷ . کدام‌یک از روابط زیر، در مورد توابع بسل صحیح است؟

۱) $I_0(0) + J_0(0) = 0$

۲) $Y_0(0) = J_0(\infty)$

۳) $Y_0(0) = K_0(0)$

۴) $I_0(0) - J_0(0) = 0$

۸ . معادله حاکم بر انتقال حرارت هدایت در یک دیواره نیمه متناهی به صورت $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ است. X, t, T به ترتیب دما، زمان و فاصله بدون بعد است. اگر از روش ترکیب متغیرها برای حل معادله استفاده شود، کدام معادله دیفرانسیل معمولی زیر، نتیجه می‌شود؟ $\eta = \frac{X}{\sqrt{t}}$

۱) $T'' + \eta T' = 0$

۲) $T'' + \frac{1}{2}\eta T' = 0$

۳) $T'' + \frac{1}{4}\eta T' = 0$

۴) $T'' + 2\eta T' = 0$

۹ . جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xy'' - y' + xy = 0$ با تغییر متغیر $v = \frac{y}{x}$ بر حسب توابع بسل کدام است؟

۱) $y = x\left[c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x)\right]$

۲) $y = c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x)$

۳) $y = x\left[c_1 J_1(x) + c_2 J_{-1}(x)\right]$

۴) $y = c_1 J_1(x) + c_2 J_{-1}(x)$

۱۰ . جواب معادله دیفرانسیل غیرخطی روبه‌رو، کدام است؟ (عدد ثابت $= k$) $\left(2xy^2 + 2\right)dx + \left(2x^2y + 4y\right)dy = 0$

۱) $y = \frac{k + 2x}{x^2 + 2}$

۲) $y = \pm\sqrt{\frac{k + 2x}{x^2 + 2}}$

۳) $y = \frac{k - 2x}{x^2 + 2}$

۴) $y = \pm\sqrt{\frac{k - 2x}{x^2 + 2}}$

۱۱ . شرط همگرایی روش نیوتن ــ رافسون، برای حل معادله غیرخطی $f(x) = 0$ چیست؟

۱) $\left|f'(x)\right| < 1$

۲) $\left|f''(x)f(x)\right| > \left[f'(x)\right]^2$

۳) $\left|f''(x)f(x)\right| < \left[f'(x)\right]^2$

۴) $\left|f'(x)f(x)\right| < \left[f''(x)\right]^2$

۱۲.شرط لازم و کافی برای پایدار بودن روش حل صریح (Explicit)، برای معادله $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \alpha \frac{\partial T}{\partial t}$ کدام است؟

۱) $4\Delta t \le \frac{\alpha}{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}}$

۲) $2\Delta t \le \frac{\alpha}{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}}$

۳) $4\Delta t \le \frac{\alpha}{\alpha(\Delta x)^2 + \alpha(\Delta y)^2}$

۴) $2\Delta t \le \frac{1}{\alpha(\Delta x)^2 + \alpha(\Delta y)^2}$

۱۳ . چند جمله‌ای درون‌یاب لاگرانژ، که از دو نقطه (x_0, f_0) و (x_1, f_1) می‌گذرد، کدام است؟

۱) $p(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

۲) $p(x) = f_0(x - x_0) + f_1(x - x_1)$

۳) $p(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f_1$

۴) $p(x) = f_0(x - x_1) + f_1(x - x_0)$

۱۴ . برای حل معادله دیفرانسیل رتبه سوم روبه‌رو، کدام روش مناسب‌تر می‌باشد؟

$$y''' - y'' + y = x$$
$$y(0) = a$$
$$y'(0) = b$$
$$y'(1) = c$$

۱) آن را مستقیماً از روش رانج ـ کاتا حل کنیم.

۲) آن را مستقیماً از روش اولر حل کنیم.

۳) ابتدا آن را به 3 معادلهٔ رتبه اول تفکیک کرده و سپس به روش پرتابی حل می‌کنیم.

۴) ابتدا آن را به 3 معادلهٔ رتبه اول تفکیک کرده و سپس به روش اختلاف‌های محدود حل کنیم.

۱۵ . نتایج تجربی تغییرات دمای یک سیستم در دامنه زمان، به صورت جدول زیر است. چنانچه بخواهیم با روش درون‌یابی (چند جمله‌ای نیوتن) مدلی برای دما به‌دست آوریم، حداکثر درجه حرارت چندجمله‌ای حاصل برابر خواهد بود تا:

$t(\min)$	0	5	10	15	20
$T(^\circ C)$	33	40	51	69	97

۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 5

۱۶. روش تیلور مرتبه دوم را، برای حل معادله دیفرانسیل زیر با $h=\frac{1}{2}$ به کار برده‌ایم. فرمول مربوط کدام است؟

$$\begin{cases} y'=-y+t+1 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

۱) $y_{n+1}=\frac{5}{8}y_n+\frac{3}{8}t_n+\frac{1}{2}$ ۲) $y_{n+1}=\frac{3}{8}y_n+\frac{5}{8}t_n+\frac{1}{2}$

۳) $y_{n+1}=\frac{3}{2}y_n+\frac{1}{2}t_n+\frac{1}{2}$ ۴) $y_{n+1}=\frac{1}{2}y_n+\frac{1}{2}t_n+\frac{1}{2}$

۱۷ . بهترین خط گذرنده از مبدأ، که به اطلاعات زیر پردازش می‌شود، کدام است؟ $(0,1),(1,2)$

۱) $y=\frac{2}{3}x$ ۲) $y=\frac{3}{2}x$ ۳) $y=2x$ ۴) $y=\frac{5}{2}x$

۱۸ . برای محاسبه $\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$ از روش سیمپسون با $N=8$ (N تعداد تقسیمات)، خطای انتگرال عددی چقدر است؟

۱) $\frac{1}{90}\left(\frac{\pi}{8}\right)^5$ ۲) $\frac{1}{180}\left(\frac{\pi}{8}\right)^5$ ۳) $\frac{1}{270}\left(\frac{\pi}{8}\right)^5$ ۴) $\frac{1}{360}\left(\frac{\pi}{8}\right)^5$

۱۹. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید. آن را به روش رانج کاتای نقطه وسط (Mid Point method) حل کنید؛ و تابع y و y' را در نقطه $x=0.1$ مشخص کنید. (اندازه گام: 0.1)

$$y''-2x-yy'-1=0$$

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{cases}$$

۱) $y(0.1)=1.215$, $y'(0.1)=2.3456$ ۲) $y(0.1)=1.115$, $y'(0.1)=2.3051$

۳) $y(0.1)=1.343$, $y'(0.1)=2.145$ ۴) $y(0.1)=1.267$, $y'(0.1)=2.4657$

۲۰. معادله‌های زیر تغییرات غلظت ماده B,A را در یک راکتور بهم خورده با زمان نشان می‌دهد. غلظت‌های C_A و C_B را لحظه $t=0.1$ با شرایط اولیه زیر، با روش اولر کدام است؟ $(\Delta t=0.1)$

$$\begin{cases} \frac{dC_A}{dt}=-C_AC_C+5C_B \\ \frac{dC_B}{dt}=C_AC_B-20C_C \end{cases} \quad \begin{cases} t=0 \\ C_A=50=C_B \\ C_C=10 \end{cases}$$

۱) $C_B=60$, $C_A=40$

۲) $C_B=280$, $C_A=25$

۳) $C_B=300$, $C_A=10$

۴) قابل محاسبه نیست، زیرا معادله C_C مشخص نشده است.

پاسخ تشریحی

۱ . گزینه ۱ درست است.

از لحاظ ابعادی مشخص است که گزینه ۱ درست است.

$$\frac{kM\left(P-P*\right)}{4\pi r^2\rho}=\frac{\frac{mol}{min}\times\frac{gr}{mol}}{Cm^2\times\frac{gr}{cm^3}}=\frac{cm}{min}$$

که با واحد $\frac{dr}{dt}$ یکسان می‌باشد.

۲ . گزینه ۲ درست است.

قانون بقاء جرم را می‌نویسیم:

تجمع = مصرف – تولید + خروجی – ورودی

$$v_0+\alpha\left(V_0-V\right)-0=\frac{dV}{dt}$$

$$\int_{V_0}^{V}\frac{dV}{v_0+\alpha\left(V_0-V\right)}=\int_0^t dt$$

$$-\frac{1}{\alpha}\left[\ln\left[v_0+\alpha\left(V_0-V\right)\right]\right]_{V_0}^{V}=t \quad\Rightarrow\quad \ln\left[\frac{v_0+\alpha\left(V_0-V\right)}{v_0}\right]=-\alpha t$$

$$v_0+\alpha\left(V_0-V\right)=v_0e^{-\alpha t} \quad\Rightarrow\quad V=V_0+\frac{v_0}{\alpha}\left[1-\exp\left(-\alpha t\right)\right]$$

۳ . گزینه ۱ درست است.

برای یافتن جواب حالت پایدار هر معادله PDE کافی است $\frac{\partial}{\partial t}$ را مساوی صفر قرار داده و معادله حاصل را حل کنیم:

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+a=0\\ u\left(0\right)=T_0\\ \frac{\partial u\left(L\right)}{\partial x}=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -ax + c_1 \quad \rightarrow \quad u = -\frac{a}{2}x^2 + c_1 x + c_2$$

$$\frac{\partial u(L)}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = aL$$

$$u(0) = T_0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = T_0$$

با جایگذاری c_1 و c_2 خواهیم داشت:

$$u_{steady} = \frac{-a}{2}x^2 + aLx + T_0 = \frac{ax}{2}(2L - x) + T_0$$

۴ . گزینه ۳ درست است.

اگر موازنه انرژی را برای دانه کاتالیزور بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\frac{dE}{dt} = mC_p\frac{dT}{dt} = (-r_A)V(-\Delta H_R) - hA(T - T_\infty)$$

$$\rho VC_p\frac{dT}{dt} = (kC_A)V(-\Delta H_R) - hA(T - T_\infty)$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } \rho VC_p} \frac{dT}{dt} = \frac{kC_A(-\Delta H_R)}{\rho C_P} - \frac{hA}{\rho VC_P}(T - T_\infty)$$

۵ . گزینه ۳ درست است.

اگر معادله و شرایط مرزی را بنویسیم مشخص است که شرط مرزی $T(r, z = L) = T_b$ باعث می‌شود که در راستای r به جواب اورتوگونال و در راستای Z به جواب غیر اورتوگونال برسیم. گزینه ۳ درست است که در راستای Z جواب غیراورتوگونال ضمناً در گزینه ۴ هر دو راستا غیر اورتوگونال است و نمی‌تواند جواب باشد. در گزینه ۲ جواب راستای Z اورتوگونال است که برعکس می‌باشد.

و در راستای r جواب تابع قابل تبدیل به اورتوگونال است.

۶ . گزینه ۳ درست است.

شرط مرزی در $x = 0$ نوع دوم می‌باشد پس تابع ویژه در راستای x کسینوسی است $(\cos\lambda_n x)$.

چون شرایط مرزی در $x = 0$ و $x = L$ هر دو از نوع دوم می‌باشد پس $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$ است.

با توجه به موارد فوق مشخص است که فقط گزینه ۳ است.

۷ . گزینه ۴ درست است.

برای توابع بسل داریم:

$$J_0(0) = I_0(0) = 1$$

$$Y_0(0) = -\infty$$

$$K_0(0) = +\infty$$

با توجه به روابط فوق مشخص است که $I_0(0) - J_0(0) = 0$

۸ . گزینه ۲ درست است.

برای حل معادله دیفرانسیل $\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ با روش ترکیب متغیرها، از پارامتر کمکی $\eta=\frac{x}{\sqrt{m\alpha t}}$ استفاده می‌کنیم و معادله دیفرانسیل معمولی $u''+\frac{m}{2}\eta u'=0$ حاصل می‌شود. با توجه به تست داده شده مشخص است که:

$$\alpha=1 \quad , \quad m=1 \quad \rightarrow \quad T''+\frac{1}{2}\eta T'=0$$

۹ . گزینه ۱ درست است.

$$y=xV \quad \rightarrow \quad y'=V+xV' \quad , \quad y''=V'+(V'+xV'')=2V'+xV''$$

با جایگذاری y و y' و y'' در معادله دیفرانسیل داده شده خواهیم داشت:

$$x(xV''+2V')-(V+xV')+x(xV)=0$$
$$x^2V''+xV'+\left(x^2-1\right)V=0$$

که معادله دیفرانسیل بسل معمولی از مرتبه اول است پس:

$$V(x)=C_1J_1(x)+C_2Y_1(x) \quad \Rightarrow \quad y=x\left[C_1J_1(x)+C_2Y_1(x)\right]$$

۱۰ . گزینه ۴ درست است.

$$P=2xy^2+2 \quad , \quad Q=2x^2y+4y$$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=4xy \quad \rightarrow$ معادله کامل است.

اگر تابع u را طوری پیدا کنیم که $\frac{\partial u}{\partial x}=2xy^2+2 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2x^2y+4y$، در این صورت $u(x,y)=C$ جواب معادله خواهد بود:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy^2+2 \quad \rightarrow \quad u=x^2y^2+2x+f(y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=2x^2y+f'(y)=2x^2y+4y$$
$$\rightarrow \quad f'(y)=4y \quad \rightarrow \quad f(y)=2y^2$$
$$\rightarrow \quad u=x^2y^2+2x+2y^2$$

پس جواب معادله عبارت است از:

$$x^2y^2+2x+2y^2=k \quad \rightarrow \quad y^2\left(x^2+2\right)=K-2x$$
$$y^2=\frac{k-2x}{x^2+2} \quad \rightarrow \quad y=\pm\sqrt{\frac{K-2x}{x^2+2}}$$

۱۱ . گزینه ۳ درست است.

۱۲ . گزینه ۲ درست است.

$$\frac{T_{i+1,j}^n-2T_{i,j}^n+T_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}+\frac{T_{i,j+1}^n-2T_{i,j}^n+T_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}=\alpha\frac{T_{i,j}^{n+1}-T_{i,j}^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\alpha\Delta x^2\Delta y^2}{\Delta t}T_{i,j}^{n+1}=\Delta y^2\left(T_{i+1,j}^n+T_{i-1,j}^n\right)+\Delta x^2\left(T_{i,j+1}^n+T_{i,j-1}^n\right)+\left(\frac{\alpha\Delta x^2\Delta y^2}{\Delta t}-2\Delta y^2-2\Delta x^2\right)T_{i,j}^n$$

با تقسیم طرفین بر $\frac{\alpha\Delta x^2\Delta y^2}{\Delta t}$ خواهیم داشت:

$$T_{i,j}^{n+1}=\frac{\Delta t}{\alpha\Delta x^2}\left(T_{i+1,j}^n+T_{i-1,j}^n\right)+\frac{\Delta t}{\alpha\Delta y^2}\left(T_{i,j+1}^n+T_{i,j-1}^n\right)+\left(1-\frac{2\Delta t}{\alpha\Delta x^2}-\frac{2\Delta t}{\alpha\Delta y^2}\right)T_{i,j}^n$$

حال بر اساس قانون مثبت باید:

$$1-\frac{2\Delta t}{\alpha\Delta x^2}-\frac{2\Delta t}{\alpha\Delta y^2}\geq 0 \quad\rightarrow\quad 2\Delta t\left(\frac{1}{\alpha\Delta x^2}+\frac{1}{\alpha\Delta y^2}\right)\leq 1 \quad\Rightarrow\quad 2\Delta t\leq\frac{\alpha}{\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}}$$

۱۳. گزینه ۱ درست است.

$$P(x)=L_0f_0+L_1f_1$$
$$P(x)=\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f_0+\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f_1$$

۱۴. فاقد گزینه درست است.

۱۵. گزینه ۲ درست است.

$t(\text{min})$	$T(^\circ C)$	ΔT	$\Delta^2 T$	$\Delta^3 T$	$\Delta^4 T$
0	33				
		7			
5	40		4		
		11		3	
10	51		7		0
		18		3	
15	69		10		
		28			
20	97				

$$T(t+rh)=T_0+r\Delta T_0+\frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2T_0+\frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\Delta^3T_0+\cdots$$

با توجه به جدول و رابطه فوق مشخص است که حداکثر چندجمله ای درونیاب برابر 3 خواهد بود.

۱۶. گزینه ۴ درست است.

$$y_{n+1}=y_n+hy'_n \quad\rightarrow\quad y_{n+1}=y_n+\frac{1}{2}(-y_n+t_n+1)$$
$$y_{n+1}=y_n-\frac{1}{2}y_n+\frac{1}{2}t_n+\frac{1}{2}$$
$$y_{n+1}=\frac{1}{2}y_n+\frac{1}{2}t_n+\frac{1}{2}$$

۱۷ . گزینه ۳ درست است.

برای یافتن معادله بهترین خط گذرنده از مبدأ $(y = mx)$ که اطلاعات مشخصی را برازش کند از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$y = mx \quad , \quad m = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=D}^{n} x_i^2}$$

$$m = \frac{0+2}{0+1} = 2 \quad \rightarrow \quad y = 2x$$

۱۸ . گزینه ۴ درست است.

در روش سیمپسون مقدار خطا از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{-(b-a)}{180} h^4 M$$

که M ماکزیمم مقدار $f^{(4)}(x)$ در فاصله $[a,b]$ است.

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \quad \rightarrow \quad F'(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad \rightarrow \quad F''(x) = -\frac{1}{4}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$F'''(x) = -\frac{1}{8}\cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad F^{(4)}_{(x)} = \frac{1}{16}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$M = \max F^{(4)}(x) \quad , \quad x \in [0,\pi] \quad \rightarrow \quad M = \frac{1}{16}$$

در نتیجه:

$$\varepsilon = \frac{-(\pi-0)}{180} \times \left(\frac{\pi}{8}\right)^4 \times \frac{1}{16}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{360}\left(\frac{\pi}{8}\right)^5$$

۱۹. گزینه ۱ درست است.

۲۰ . گزینه ۲ درست است.

$$\begin{cases} C'_{A_o} = -C_{A_o}C_{C_o} + 5C_{B_o} \\ C'_{B_o} = C_{A_o}C_{B_o} - 20C_{C_o} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C'_{A_o} = -(50\times 10) + (5\times 50) = -250 \\ C'_{B_o} = 50\times 50 - (20\times 10) = 2300 \end{cases}$$

$$C_{A_1} = C_{A_o} + hC'_{A_0} \quad \Rightarrow \quad C_{A_1} = 50 + (0.1\times -250) \quad \Rightarrow \quad C_{A_1} = 25$$

$$C_{B_1} = C_{B_0} + hC'_{B_o} \quad \Rightarrow \quad C_{B_1} = 50 + (0.1\times 2300) = 50 + (0.1\times 2300) \quad \Rightarrow \quad C_{B_1} = 280$$